

Búsqueda de rutas óptimas mediante detección de curvatura espacial

Mauricio Cleveland
Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Concepción.
mcleveland@udec.cl

Resumen

Los problemas de tipo combinatorio requieren para su resolución elevados tiempos de cómputo, en particular, con métodos tradicionales, el problema del vendedor viajero (TSP) obtiene una solución en un tiempo del orden de los miles de años para una entrada moderadamente mediana. En consecuencia, para abordar este tipo de problemática se introducen técnicas de inteligencia artificial que entregan soluciones próximas a las óptimas en tiempos razonables. A continuación, se presenta una propuesta de resolución para el problema del TSP modificado a partir de una técnica basada en la geometría espacial.

1. Introducción

El problema del TSP [1] consiste en que, dado un conjunto finito de ciudades y distancias o costos asociados entre éstas, se deben visitar todas las ciudades exactamente una vez obteniendo como resultado la mínima distancia total. Lo anterior requiere verificar el orden en que las ciudades son visitadas. En la actualidad, se emplean diversos tipos de técnicas de inteligencia artificial para resolver el problema, entre ellas se tienen: Algoritmos genéticos [3], Simulated annealing [5], Colonias de hormigas [8], Redes neuronales [4] y Búsquedas tabú [9], entre otras. Sin embargo, según la literatura, la técnica que mejores resultados arroja es “colonias de hormiga”, en particular ACS. El trabajo fundamental que relaciona el problema del vendedor viajero y sistemas de colonias de hormigas (ACS) fue realizado por Dorigo y Gambardella [8]. En este artículo, se describe cómo un conjunto de agentes que cooperan, llamados *hormigas*, colaboran para encontrar buenas soluciones al TSP. Las hormigas cooperan usando un mecanismo indirecto de comunicación, a través de un agente químico llamado feromona, la cual es depositada en los arcos del grafo que se construye a medida que se van completando las eventuales soluciones.

Otros trabajos incorporan variaciones como la hibridación de algoritmos de hormigas con algoritmos randomizados [2], cuyo resultado relevante es un menor tiempo de convergencia, unido a una mejor calidad en las soluciones, cuando se compara con el uso exclusivo de ACS.

Se requiere entonces encontrar la menor distancia de recorrido de los nodos en un grafo completo, tal que todos los nodos sean visitados, es decir, una variación del problema del “TSP”. Para ello se utiliza una técnica de inteligencia artificial propuesta y los resultados son comparados con el algoritmo hormiga “Ant Colony System (ACS)”. Se comienza por describir la geometría espacial de forma somera y posteriormente se muestra el modelo propuesto, las mediciones y contra qué se comparan. Luego, se muestran los resultados con el correspondiente análisis y las conclusiones que se obtienen.

2. Propuesta

2.1. Curvatura del espacio-tiempo

Utilizada por Albert Einstein en la “Teoría general de la relatividad”[11], la curvatura espacio-tiempo describe a la gravedad como el efecto de la geometría espacial-temporal sobre cuerpos masivos. En este enfoque, un cuerpo le dice al espacio cómo debe curvarse y el espacio al cuerpo, cómo debe moverse. En consecuencia, un cuerpo no está sometido a fuerzas invisibles, sino más bien al efecto de una curvatura y este cuerpo sigue la ruta que el espacio tiene moldeada, es decir, su campo gravitatorio. Se debe considerar también el carácter relativista de los elementos participantes, en particular la variación de propiedades físicas según la cercanía a la velocidad de la luz. Se considera, por ejemplo, el factor de Lorentz, que soluciona el problema de un sistema de referencia inercial privilegiado. La ecuación 1 cuantifica la masa a grandes velocidades, considerando el factor mencionado.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [g] \quad (1)$$

Donde m_0 es la masa propia, v la velocidad del cuerpo y c la velocidad de la luz. Se puede apreciar que a velocidades pequeñas la masa m del cuerpo es cercana a m_0 .

Los cuerpos son acelerados por la curvatura del espacio, considerando campos débiles y cuerpos perfectamente esféricos, mediante la ecuación 2.

$$\vec{A}c = -G \frac{M}{d^2} \vec{r} \left[\frac{1}{s^2} \right] \quad (2)$$

Donde G es la constante de gravitación universal, M la masa de un cuerpo, d la distancia al cuerpo atraído y \vec{r} un vector de dirección unitario.

La ecuación 3 es la generalización del momento lineal, válida para sistemas inerciales en el contexto relativista. Donde \vec{p} es el momento lineal, \vec{v} la velocidad y m la masa de un cuerpo.

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Se tiene además que la fuerza se define como la tasa de cambio del momento lineal de un cuerpo, esto queda expresado en el desarrollo 4 (Considerando que la velocidad tiene la misma dirección que la fuerza aplicada sobre el cuerpo).

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{m\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{dv}{dt} = \frac{m \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{m \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

De 3 y 4 se obtiene la ecuación 5, que corresponde a la generalización de la segunda ley de Newton.

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{g}{s^2} \right] \quad (5)$$

Finalmente, se obtiene una simple ecuación que describe la fuerza aparente del campo gravitatorio entre el espacio, un cuerpo masivo de masa M y uno de masa m_c , esta ecuación es:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm_c}{d^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{g}{s^2} \right] \quad (6)$$

3. Modelo

Se desea imitar las características del universo y como éste, a través de los elementos principales que lo componen, logra evolucionar para construir entidades que parecieran ser de una naturaleza y formación muy compleja y que, sin embargo, emergen aceleradamente por el cosmos. Como ejemplo, la formación de planetas está sujeta a las características geométricas del espacio-tiempo, tales condiciones permiten que elementos distintos en volumen y densidad se concentren guiados por la interacción del campo gravitatorio para finalmente formar los planetas. Posteriormente y por el mismo mecanismo, elementos que se pensaba (hace solo algunos años) exclusivos del planeta tierra aparecen repartidos por todo el universo (el más claro ejemplo es el agua). También aparecen [12] sistemas planetarios similares al nuestro [13], denominados exoplanetas. Entonces, se puede pensar que elementos tan particulares y con las condiciones “óptimas” no son de una “rareza extrema”, sino mas bien, comunes y formados por interacciones simples. La propuesta entonces es replicar a grandes rasgos el diseño universal y aprovechar la aparente facilidad con que emergen elementos complejos en un algoritmo donde los tiempos se pueden manejar de una mejor manera.

El modelo considera tres elementos: un grafo completo (problema), partículas y una matriz representativa del espacio-tiempo, es decir, un “universo”, el cual contiene cuerpos masivos distribuidos aleatoriamente, siendo este el nexo entre los dos anteriores. El grafo problema es superpuesto al espacio tiempo, y es sobre éste donde las partículas son depositadas aleatoriamente para que realicen su viaje. La ruta que siguen tales partículas es guiada por la curvatura del espacio-tiempo mediante el campo gravitatorio dada por la ecuación 10. Mientras las partículas poseen una velocidad v , tal que $v \ll c$ su masa será despreciable en comparación a los cuerpos que curvan el espacio, por lo tanto, siempre tendrán una próxima ruta a seguir. El grafo problema representa justamente las distancias entre las posiciones superpuestas, es decir, la distancia entre una partícula y el cuerpo masivo del espacio-tiempo, representado por un elemento en la matriz espacio-tiempo.

El procedimiento consiste entonces en la creación de un universo (Big Bang) de manera aleatoria. Cada partícula perteneciente a un universo construye la solución mediante la interacción con éste. A su vez, cuando una partícula se instancia, el universo cambia su configuración de manera independiente. La partícula que obtenga la mejor solución, luego de visitar todos los nodos del grafo problema (única manera de verificar la distancia de los nodos), será candidata a entregar la solución final para cada universo creado. Lo anterior se lleva a cabo para cada partícula dentro en un universo, es decir, si se aumenta el número de ambos elementos, las probabilidades de encontrar una solución se incrementan también.

Dado un grafo no dirigido P (grafo problema), donde $P = (V, E)$ y:

- V es un conjunto de vértices o nodos.
- E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.

Se consideran los nodos como ubicaciones en un mapa, y las aristas como las distancias entre los anteriores. Para un grafo como el que se muestra en la figura 1.

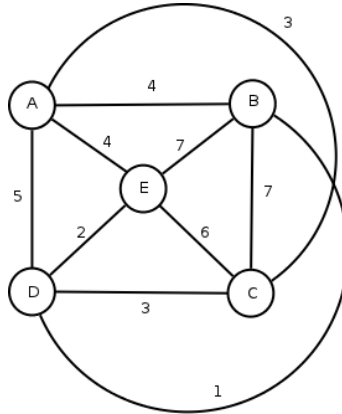


Figura 1: Grafo ejemplo.

Su representación es descrita mediante una matriz de distancia simétrica, esto es:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & 4 & 3 & 5 & 4 \\
 4 & 0 & 7 & 1 & 7 \\
 3 & 7 & 0 & 3 & 6 \\
 5 & 1 & 3 & 0 & 2 \\
 4 & 7 & 6 & 2 & 0
 \end{array} \tag{7}$$

El espacio-tiempo se representa también mediante una matriz de enteros aleatoria de iguales dimensiones que el grafo problema, donde los valores indican la masa de un cuerpo en una cierta ubicación de un plano. Si el entero es de un alto valor, la curvatura espacial del plano es mayor también. El espacio es dinámico y esto se refleja en el modelo, agrupando valores elevados, es otras palabras, los elementos en el espacio también interactúan mediante su campo gravitatorio variando su configuración a través del tiempo. La siguiente matriz representa un plano espacio-temporal, en donde el elemento de la segunda fila y cuarta columna tiene el campo gravitatorio más elevado. En las figuras 2 y 3 se aprecian los planos curvados (cada elemento de la matriz fue multiplicado por el escalar -1) correspondientes a las matrices 8 y 9 respectivamente.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 3 & 10 & 8 \\
 18 & 0 & 9 & \mathbf{20} & 1 \\
 7 & 7 & 0 & 6 & 15 \\
 5 & 11 & 1 & 0 & 14 \\
 1 & 13 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \tag{8}$$

La interacción gravitatoria se lleva a cabo mediante vecindades del mismo. Se ha escogido la “vecindad de Moore” (figura 4) para tal proceso. Se verifica la interacción gravitatoria sólo en esta vecindad, las interacciones a mayor escala son despreciadas. Para el ejemplo, las vecindades de la segunda fila y cuarta columna quedan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 18 & 0 & 1 & \mathbf{72} & 1 \\
 7 & 7 & 0 & 1 & 1 \\
 5 & 11 & 1 & 0 & 14 \\
 1 & 13 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \tag{9}$$

Si los valores de la vecindad son estrictamente menores al valor central, éstos son sumados a tal valor y las vecindades cambian su numeración por el entero uno. El procedimiento anterior se lleva a cabo escogiendo ubicaciones aleatorias del espacio-tiempo. También se consideran los casos en los cuales los valores crezcan

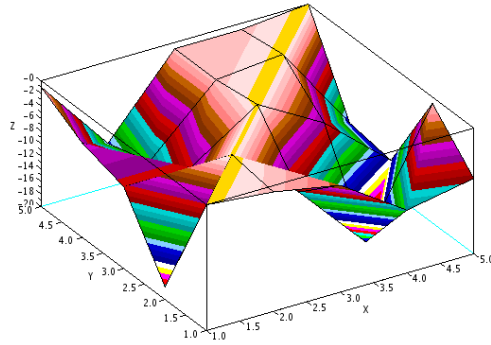


Figura 2: Superficie inicial.

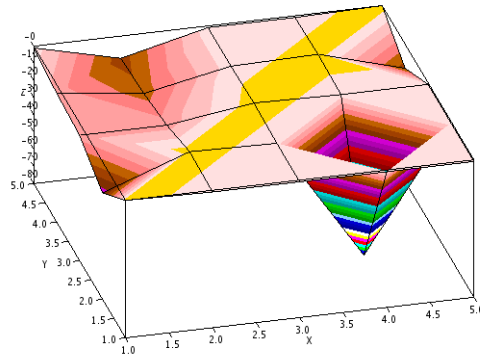


Figura 3: Superficie luego de la interacción.

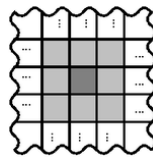


Figura 4: Vecindad de Moore.

de manera desproporcionada, provocando óptimos locales (debido al gran campo gravitacional que se forma). Para ello se establece un límite de crecimiento determinado experimentalmente. Superado este límite, se realiza una nueva distribución de la vecindad en función del valor límite alcanzado. Una partícula es una entidad con dimensiones unitarias y una masa dada, recorre el espacio tiempo a través del grafo de entrada. Estas partículas son los agentes que construyen la solución, al ser modeladas implícitamente, se tendrá la ruta que estas han seguido, lo que indica su existencia en una determinada ubicación del grafo en algún tiempo t . La ecuación 6 es empleada para calcular la interacción entre el grafo problema, el espacio-tiempo y las partículas. Para simplificar las operaciones aritméticas, se considera la constante de gravitación G igual a uno, la fuerza resultante en valor absoluto y el problema tendrá una dimensión. Finalmente, se obtiene la ecuación simplificada:

$$\vec{F} = \frac{Mm_p}{d^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{g}{s^2} \right] \quad (10)$$

Donde M representa la masa del cuerpo en el plano espacio-tiempo (matriz espacio-tiempo), m_p la masa de la partícula, d la distancia entre el cuerpo masivo y la partícula (dada por el grafo problema), s el tiempo en segundos, v y c la velocidad de la partícula y de la luz respectivamente medida en m/s . Este cálculo se realiza para cada vecindad del grafo problema, el campo gravitatorio que induzca una mayor fuerza guía la partícula en función de su velocidad propia y la distancia con el cuerpo masivo M del espacio-tiempo.

4. Pruebas y resultados

ACO [7] es una estrategia metaheurística que utiliza agentes autónomos para encontrar buenas aproximaciones a problemas de optimización, en particular, en la búsqueda de rutas óptimas. Los agentes construyen la solución incrementalmente basado en un modelo de feromonas, que permiten determinar las rutas más frecuentemente usadas. En cada iteración una colonia de m hormigas construyen las soluciones de manera probabilística, guiándose por un rastro de feromona artificial y por una información calculada a priori de manera heurística.

Las pruebas se realizaron con un grafo completo de 200 nodos (por considerar que es un problemas difícil de resolver por métodos tradicionales) generados aleatoriamente para el caso del TSP modificado, esto es, completar el viaje sin retorno. Para comparar los resultados, se implementa un algoritmo hormiga ACS variando los parámetros α , β , q_0 , hormigas y colonias (correspondientes al exponente de las feromonas, distancias, un valor asociado a la probabilidad, agentes y número de iteraciones respectivamente) hasta obtener el mejor resultado. El algoritmo propuesto, denominado Algoritmo de curvatura espacial (ACE) es sometido a las mismas exigencias (en cuanto a número de agentes e iteraciones) y los datos se pueden observar en el cuadro 1, donde ud se refiere a unidades de distancia y s a segundos.

Se puede apreciar que en todas las pruebas, el algoritmo propuesto se comporta de mejor manera. Las razones del buen resultado se pueden atribuir al carácter probabilístico. La constante variación del entorno, en extremo explosiva, brinda múltiples posibilidades que, en definitiva, aumentan las probabilidades de encontrar buenas soluciones. En este enfoque se ha querido dar mayor libertad a factores estocásticos, sin embargo, es la interacción de elementos (en este caso aleatorio y conocidos) la que permite la aparición de resultados.

Si se considera el mejor resultado global (se asume un 100% de efectividad) obtenido por el método ACE, esto es: 814,0(ud), se observa que en condiciones donde el número de universos y partículas es mínimo (primera fila de la tabla 1), se obtiene un 89,6% de efectividad en el “mejor” de los casos. Para el peor resultado el porcentaje baja a 79,5%, siendo aun un valor aceptable. Por otra parte, la implementación del algoritmo ACS muestra un 93,1% de efectividad en el mejor resultado. También se puede notar el decremento en el tiempo de procesamiento a medida que el número de iteraciones aumenta significativamente, esto se puede explicar por cómo el método ACE selecciona elementos en la matriz espacio-tiempo para su modificación (de manera aleatoria y limitando el número de selecciones).

También se realizaron pruebas con dos instancias conocidas, las que pueden ser obtenidas desde TSPLIB [14], estas corresponden al problema TSP original. El cuadro 2 muestra los resultados. ACE tiene el peor comportamiento en estos casos, y en general los resultados no son buenos cuando las distancias entre los nodos tienen un valor elevado en comparación al promedio de todas las distancias del grafo problema (en las matrices generadas aleatoriamente esto estaba controlado por el intervalo [10, 30]).

5. Conclusiones

Para el caso del algoritmo hormiga (ACS), con instancias aleatorias, se iteró varias veces hasta converger a la combinación adecuada de parámetros que entregara el mejor resultado. La implementación propuesta, en cambio, no requiere de ajustes, lo que brinda una mayor velocidad de respuesta en este sentido. Además, la velocidad inicial del método propuesto hace pensar que podría ser una buena idea mezclar esta técnica con algoritmos hormiga en las primeras iteraciones, sin embargo, es necesario realizar experimentos que confirmen

Cuadro 1: Pruebas - Se ejecutó tres veces cada instancia.

Colonias / Universos	Hormigas / Partículas	Parámetros	Mejor tiempo(s) / Distancia(ud) / Peor distancia(ud) [ACS]	Mejor tiempo(s) / Distancia(ud) / Peor distancia(ud) [ACE]
10	10	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,99$	12.59 / 1872.0 / Sin variación	12.56 / 909.0 / 1024.0
20	10	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,99$	23.63 / 1839.0 / Sin variación	25.21 / 887.0 / 994.0
50	20	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,98$	84.46 / 969.0 / 1004.0	121.34 / 906.0 / 949.0
100	10	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,98$	62.58 / 1570.0 / 1752.0	100.45 / 894.0 / 922.0
100	100	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,99$	1201.68 / 875.0 / 917.0	1206.73 / 819.0 / 919.0
200	100	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	2415.36 / 875.0 / 1544.0	2001.45 / 867 / 877.0
300	30	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	1127.88 / 1544.0 / 1782.0	993.18 / 871.0 / 889.0
300	40	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	1496.36 / 1570.0 / 1739.0	1471.58 / 875.0 / 887.0
300	50	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	1822.12 / 944.0 / 1544.0	1885.11 / 872.0 / 895.0
300	60	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	2223.62 / 944.0 / Sin variación	2081.53 / 880.0 / 910.0
400	50	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	2516.88 / 875.0 / Sin variación	2298.51 / 815.0 / 891.0
400	100	$\alpha = 0,8$ $\beta = 0,8$ $q_0 = 0,9$	5040.64 / 875.0 / Sin variación	4539.47 / 825.0 / 885.0

Cuadro 2: Pruebas con instancias conocidas.

Nombre de instancia	Valor obtenido con ACE (valores reales)	ACS (valores reales)	Óptimo (valores enteros)
kroA100 (100 nodos)	23974,32341	21285,44937	21282
eil51 (51 nodos)	466,12865	429,98331	426

esta hipótesis, ya que el carácter aleatorio es la principal virtud de la propuesta.

Es altamente recomendable utilizar el método ACE en condiciones donde el tiempo de respuesta es crítico, ya que la técnica entrega buenas aproximaciones aún bajo condiciones adversas (cantidad baja de universos o partículas).

Al igual que los algoritmos hormiga, la actual propuesta es fácilmente paralelizable debido a la independencia de los “universos generados”, pudiendo de esta manera incrementar el rendimiento de la implementación.

ACE tiene parámetros que fueron determinados experimentalmente (nivel máximo de campo gravitatorio y selección de elementos para modificar la configuración de la matriz espacio-tiempo), por esta razón es necesario realizar más pruebas para determinar con exactitud cuál es la influencia de tales parámetros en el rendimiento global del algoritmo. Este aspecto se pretende abordar en trabajos futuros.

Si bien es cierto que las probabilidades no pueden dar certeza de obtener resultados favorables, sí se pueden manejar las condiciones para tratar en lo posible de aumentarlas. Es este aspecto fundamental el que se ha tratado de explotar en este trabajo, con resultados aceptables. Sin embargo, y como se mostró, los problemas exitosamente resueltos están acotados a entradas particulares. Es necesario experimentar con aplicaciones prácticas para tener una estimación del real aporte del método. Evidentemente, esta es una primera aproximación.

Para resolver los inconvenientes con grafos arbitrarios se pueden introducir métodos de guía deterministas. Sin embargo este tema será considerado en un próximo trabajo.

Referencias

- [1] G.Reinelt. The Traveling Salesman, Computational Solutions for TSP Applications. Institut fur Angewandte Mathematik, Universitat Heidelberg (1994).
- [2] C.Qi. An Ant Colony System Hybridized with Randomized Algorithm for TSP. Haier International Training Center (2007).
- [3] C.Moon, J.Kima, G.Choia, Y.Seob. An efficient genetic algorithm for the traveling salesman problem with precedence constraints. Hanyang University (2002).
- [4] E.M.Cochrane, J.E.Beasley. Co-adaptive neural network approach to the Euclidean Travelling Salesman Problem. Glasgow Caledonian University (2003).
- [5] K.Meer. Simulated Annealing versus Metropolis for a TSP instance. Syddansk Universitet Odense (2007).
- [6] K.Katayama, H.Sakamoto and H.Narihisa. The efficiency of hybrid mutation genetic algorithm for the travelling salesman problem. Okayama University (2000).
- [7] M.Dorigo, T.Stützle. Ant Colony Optimization. MIT Press (2004).
- [8] M.Dorigo, L.M.Gambardella. Ant colonies for the travelling salesman problem. Universite Libre de Bruxelles (1997).
- [9] M.Gendreaub, G.Laportea, F.Semet. A tabu search heuristic for the undirected selective travelling salesman problem.
- [10] R.Ríos, C.Gallego. Técnicas heurísticas aplicadas al problema del cartero viajante (TSP). Universidad Tecnológica de Pereira Colombia, (2004).
- [11] W.Rindler. Essential Relativity Especial, General and Cosmological. University of Texas at Dallas (1977).
- [12] Sitio Web del telescopio espacial Kepler. Disponible en: <http://kepler.nasa.gov>.

[13] Sitio Web de catálogo de exoplanetas. Disponible en: <http://exoplanet.eu>.

[14] Sitio Web de problemas TSP conocidos. Disponible en:
<http://www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>.